

分数のわり算について

なぜ分数のわり算は、逆数のかけ算になるのでしょうか。新聞・雑誌などでこれに関する記事をよく目にしてきましたし、テレビで30分の特集番組を見たこともあります。学校の教科書を見ればきちんと説明が書いてあるのですが、記述が簡潔なのでやや理解しにくく、また実感がわかないのではないのでしょうか。今日はこのことについて詳しく書いてみたいと思います。まず、次のことを確認して下さい。(教科書に書いてあることです。)

わり算では、わられる数とわる数に同じ数をかけても、商(わり算の答え)は変わらない。

たとえば、 $6 \div 2$ の計算では、わられる数(6)とわる数(2)に、それぞれ10をかけて、 $(6 \times 10) \div (2 \times 10)$ すなわち、 $60 \div 20$ としても商(3)は変わりません。

このことを用いると、たとえば

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$$

の計算では、わられる数 $\frac{2}{3}$ と、わる数 $\frac{4}{5}$ に、それぞれ、わる数の逆数をかけて、

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} &= \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} \right) \div 1 \\ &= \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{4} \right) \div \left(\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} \right) = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となり、「分数のわり算は逆数のかけ算になる」と、わかります。

説明は、これで終わりです。(教科書には別の説明も出ていますが、簡単だと思われる方を採用しました。)しかし、まだ実感がわからない人もかなりいると思います。「なぜ、分数のわり算は逆数のかけ算になるのか。」という疑問の背後には、「そもそも分数でわるとは、どういうことなのか。」という問いがあると思います。「12を3でわるのは、12を3等分することだから良くわかる。しかし、12を $\frac{1}{3}$ でわるというのは、一体どういうことだ。」というわけです。

実は、 $12 \div 3$ には、12を3等分するということの他に別の意味があります。「12mの鉄棒を3等分すると、一本何mになるか。」とか「12個のリンゴを3人に平等に分けると、一人当たり何個になるか。」といった問題は、まさに「12を3等分する」ことを求めているのであって、これは、「等分除」と呼ばれます。一方、「12mの鉄棒を3mずつ切っていくと何本になるか。」とか「12個のリンゴを一人3個ずつ分けていくと、何人に分けられるか。」という場合は、「12の中に3がいくつ含まれるか。」を問題にしているのであって、これを「包含除」と呼びます。

等分除の考え方をういれば、分数のわり算はとてもわかりにくくなりますが、包含除の考え方をういれば、

1の中に、 $\frac{1}{3}$ は3つありますから、

$$1 \div \frac{1}{3} = 3$$

同様に考えて

$$12 \div \frac{1}{3} = 12 \times 3 = 36$$

ということが、実感できるのではないのでしょうか。