

常用対数と関連入試問題について

「 2^{30} は何けたの数か。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。」

これは教科書の例題に良く出ている問題で、大体次のような解法が示されています。

(解) 2^{30} の常用対数をとると、

$$\log_{10} 2^{30} = 30 \log_{10} 2 = 30 \times 0.3010 = 9.03$$

よって、 $9 < \log_{10} 2^{30} < 10$

ゆえに、 $10^9 < 2^{30} < 10^{10}$

すなわち、 2^{30} は、10けたの数である。

対数の意味がしっかりつかめている人は、上に書いてあることだけで十分に理解できるわけですが、「どうも良くわからない。」という人も少なくないようです。以下にさらにかみくだいた解説を書いてみましょう。

10 は2けたの数

10^2 は3けたの数

10^3 は4けたの数

というように、ある数が何けたの数かを知る

ためには、その数が「10の何乗であるか」がわか

れば良いわけです。

2^{30} が10の何乗かを知るために、

$$2^{30} = 10^x$$

とおきます。定義によれば

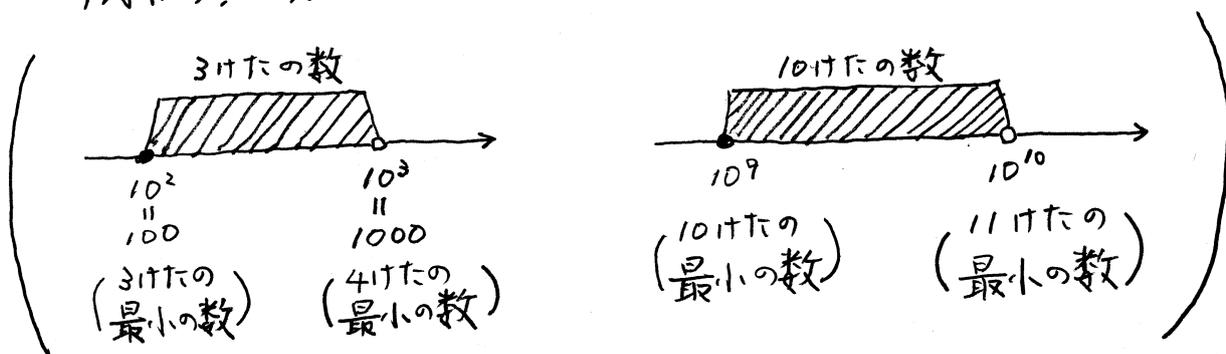
$$a = 2^b \Leftrightarrow b = \log_2 a$$

$$C = a^r \Leftrightarrow r = \log_a C \quad (a > 0, a \neq 1; C > 0)$$

ですから、

$$\begin{aligned} 2^{30} = 10^x &\Leftrightarrow x = \log_{10} 2^{30} \\ &= 30 \log_{10} 2 \\ &= 30 \times 0.3010 \\ &= 9.03 \end{aligned}$$

すなわち、 $2^{30} = 10^{9.03}$



(したがって、 2^{30} は、10けたの数とわかります。)

「 2^{30} の常用対数をとる」とは、「 2^{30} が10の何乗かを調べる」という意味だったので。

関連入試問題をひとつ解いておきましょう。

$$\lceil \log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$$

とするとき、 18^{35} の最高位の数字を求めよ。(北大)

(解) $18^{35} = 10^x$ とおくと、

$$\begin{aligned} x &= \log_{10} 18^{35} \\ &= 35 \log_{10} (2 \times 3^2) \\ &= 35 (\log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3) \\ &= 43.932 \end{aligned}$$

すなわち、 $18^{35} = 10^{43.932}$
 $= 10^{43} \times 10^{0.932}$
(各位の数字を定める部分)

ここで、 $y = 10^{0.932}$ とおくと、

$$\log_{10} y = 0.932$$

いま $\log_{10} 8 = 3 \log_{10} 2 = 0.9030$, $\log_{10} 9 = 2 \log_{10} 3 = 0.9542$

よって $\log_{10} 8 < \log_{10} y < \log_{10} 9$

ゆえに $8 < y < 9$

[つまり] $18^{35} = 10^{43} \times 10^{0.932} = 10^{43} \times 8. \dots$

すなわち、 18^{35} の最高位の数字は8である。 … (答)