数学的帰納法と生徒諸君の混乱について

平成６年度より、高１で数学的帰納法が扱われるようになりました。今日は、この学習にあたって生徒諸君にしばしば見られる（それでいて参考書などにあまり説明がない）混乱について書きたいと思います。

まず、「数学的帰納法」という言葉をはじめて聞く人のために、型通りの説明をします。小学校以来おなじみの、次の例で考えることにしましょう。

nが自然数のとき、 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

上記の$\boxed{}$の中全体をP(n)と表すことにします。

「P(n)がすべての自然数について真である(正しい)」ことは、別の方法で簡単に説明できますが、ここでは数学的帰納法を用いて証明してみましょう。

（証明）

〔Ｉ〕 n＝1のときは、左辺＝１、右辺＝$\frac{1}{2}\times1\times2=1$

よってP(n)が成り立つ。

（〔Ｉ〕の内容を「P(1)は真である」と表します。）

〔II〕 n＝kのときP(n)が成り立つとすると

$$1+2+3+\cdots\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

この式の両辺にk＋１を加えると、

$$1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}$$

よってn＝k＋１のときもP(n)が成り立つ

（〔II〕の内容を「P(k)が真ならばP(k＋1)も真である」と言い、P(k)⇒P(k＋1)と表します。
⇒は、「ならば」と読みます。）

〔Ｉ〕、〔II〕よりP(n)はすべての自然数について成り立つ。

（証明終）

少し説明を加えると、

kに順に1、2、3、……を代入すれば、

$\underbrace{\text{P(1)が真}}_{\text{証明〔I〕より}}$で、$\underbrace{\text{P(1)}\Rightarrow\text{P(2) が真}}_{\text{証明〔II〕より}}$だから、P(2)は真

P(2)が真で、$\underbrace{\text{P(2)}\Rightarrow\text{P(3) が真}}_{\text{証明〔II〕より}}$だから、P(3)は真

P(3)が真で、$\underbrace{\text{P(3)}\Rightarrow\text{P(4) が真}}_{\text{証明〔II〕より}}$だから、P(4)は真

…………………………………………………

となって、P(n)がすべての自然数について真であることが証明されたわけです。

ふつう、教科書などでは数学的帰納法は次のようにまとめられているようです。

> 自然数nに関する命題P(n)が
>
> **<u>すべての自然数に対して成り立つ</u>**
>
> ことを証明するには、次のことを証明すれば良い。
>
> 〔I〕P(1)が成り立つ
>
> 〔II〕P(k)が成り立つと仮定すると
> 　　P(k＋1)が成り立つ

さていよいよ本題に入りますが、ここまで話を進めてきたとき生徒諸君からしばしば出される質問は、

「証明のうち〔II〕の『n＝kのときP(n)が成り立つとすると』という部分は、文字をnからkに変えただけで結論を仮定に用いていることになり、おかしいのではないか。」

というものです。この質問が出ると、それまで「わかったつもり」になっていた人も、

「言われてみれば確かにそうだ。これは変だ。」

ということになり、頭が混乱してくるようです。

この質問に対するふつうの回答は、おおむね次のようなものでしょう。

「〔II〕の『P(k)が成り立つ』というのは、『任意の自然数kに対してP(k)が成り立つ』という意味ではない。kは一つの定まった自然数なのだ。」

これだけの説明で納得出来れば、もちろん問題はないのですが、なかなか混乱がおさまらない人も多いようです。ここではそういう人たちのために、数学的帰納法に良く似た例をあげて、もう少し説明を加えたいと思います。

「『整数nについて、n^2は4の倍数である』をR(n)と表すことにします。

〔I〕 n＝2のときは、$2^2=4$だからR(n)が成り立つ。

〔II〕 n＝kのときR(n)が成り立つとするとmを整数として

$$k^2=4m \quad とおける。$$

このとき$(k+2)^2=k^2+4k+4=4m+4k+4=4(m+k+1)$

いまm＋k＋1は整数だから、n＝k＋2のときもR(n)が成り立つ。

〔I〕、〔II〕よりR(n)は2以上のすべての偶数について成り立つ。」

この例では〔I〕で「R(2)が真である」ことを証明し、〔II〕で「R(k)⇒R(k＋2) が真である」ことを証明したので、R(n)がn＝2、4、6、8、……について成り立つことが証明されたわけです。〔II〕では、「n＝kのときR(n)が成り立つとすると」としましたが、これが「任意の整数kに対してR(k)が成り立つ」と仮定したのではないことは明らかでしょう。(実際、k＝1、3、5……などの時には、R(k)は偽(誤り)となります。) この部分は「ある定数kのときR(k)が真であるとすると」と言っているにすぎないわけです。

(もちろん「nが2の倍数のときR(n)は真である」ことは中2レベルで簡単に証明できますが、ここでは「数学的帰納法」的な考え方の練習をしたわけです。この例ではnを負の数からはじめることも出来ます。)

ここまで読めば、もう最初の例P(n)についても混乱はおさまったのではないかと思います。また「P(k)が真ならばP(k+1)も真である」ことを証明しても、「P(k)が真である」ことは何ら保証されておらず、それだからこそ〔I〕の証明が不可欠となることも実感出来たのではないでしょうか。この点については、もう一つ例をあげておきましょう。

「自然数nについてn=n+2（今度はこれをP(n)と表すことにします)がn=kのとき成り立つとすると、k=k+2、この両辺に1を加えれば、(k+1)=(k+1)+2、よってn=k+1のときもP(n)が成り立つ。」

さて、以上の話からもおわかりのように、田中塾は、どの本を見ても書いてあるような説明だけを一方的にくり返し、生徒の質問を封じてしまうような塾ではありません。悩みがあれば(考えなければ悩むこともありません)、そのつまずきの原因は何か、いい解決策はないかを、生徒と一緒になって真剣に考える塾です。

(平成6年3月10日 田中)

(Peano(ペアノ)の第5公理)〔数学的帰納法の公理〕

自然数全体の集合をNとする。集合Mが下記の〔I〕、〔II〕をともに満たせば、N⊂M(MはNを含む)である。

〔I〕 $1 \in M$ （1はMの要素である）

〔II〕 $k \in M$ ならば $k+1 \in M$
(kがMの要素ならば、必ずk+1もMの要素である。)

Peanoの公理は数学辞典（事典）、参考書、百科事典などで見ることが出来ます。上記のものは、理解しやすいように少し表現を変えてあります。