自然数の２乗になる数を平方数という。以下の問いに答えよ。

１０進法で表して３桁以上の平方数に対し、１０の位をａ、１の位をｂとおいたとき、ａ＋ｂが偶数となるならば、ｂは０または４であることを示せ。

（東大・２００４年度・前期・理系）

（証明）

2桁以上の任意の自然数を $n=10P+q$ とおく。

（ただし、Pは正の整数、qは n の一の位の数とする。）

$$n^2=(10P+q)^2$$
$$=100P^2+20Pq+q^2$$

ここで、$20Pq$ は、Pq の値にかかわらず偶数だから、

n^2 の十の位を a、一の位を b とすると、$a+b$ が

偶数ならば、q^2 を2桁表示したときの、十の位の数

と一の位の数の和が偶数となる。

$q=0, 1, 2, \cdots$ の場合を順に考えると、

$0^2=0$, $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$

$5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$

だから、

$q^2=0, 4, 64$

すなわち、

b は、0または4である。　（証明終）